CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS MP

DEUXIÈME ÉPREUVE
DE
MATHEMATIQUES

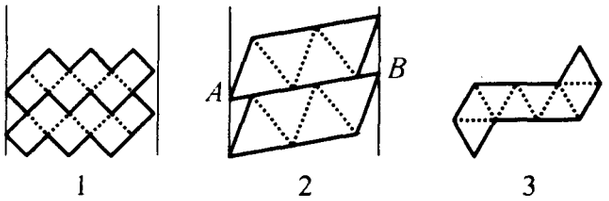
Durée : 4 heures
Coefficient : 14

On veut fabriquer en série des boîtes de papier dont le volume soit 1 décimètre cube, et dont la surface soit petite et assez simple pour être découpée dans une bande de papier de largeur $a = 50$ cm sans trop de chutes.

Les boîtes n'ont pas d'onglet pour maintenir les faces entre elles, elles doivent s'obtenir en pliant simplement un patron d'un seul tenant.

1. On examine le cas du cube. Quelle longueur faut-il donner à ses côtés pour que le volume soit 1 décimètre cube? Quelle est alors sa surface? Vérifier que la patron 1 peut tenir dans la bande de papier et qu'il utilise par cube une surface de $5\sqrt{2}$ dm^2. Quelle est la proportion perdue en chutes (on forme le rapport chute/surface totale utilisée)?

Les traits pleins montrent les lignes à découper, les pointillés les lignes à plier.



1 2 3

Attention, les proportions sont volontairement inexactes dans ces figures.

2. Montrer que le volume d'une pyramide est le tiers du produit de la surface de sa base par la hauteur, qui est la distance du sommet à la base.

3. On examine le cas du tétraèdre régulier de côté L, c'est-à-dire d'une pyramide dont la base est un triangle équilatéral de côté L et les trois faces des triangles équilatéraux.

Calculer son volume et sa surface en fonction de L. Quelle valeur faut-il donner à L pour avoir le bon volume? Quelle est alors la surface utilisée? Montrer que la patron 2 permet de faire les boîtes. Préciser l'angle à mettre entre les cotés de la bande et les lignes telles que AB qui séparent les patrons.

Evaluer la chute correspondante.

4. On examine le cas de l'octaèdre régulier, c'est-à-dire du solide obtenu en accolant par leur base deux pyramides à base carrée et dont les faces sont des triangles équilatéraux.

Calculer son volume et sa surface en fonction de son côté L. Comment placer le patron 3 pour que chaque boîte n'utilise, chute comprise, qu'une surface de mesure aL. Quelle est la chute correspondante?

5. Parmi les trois méthodes vues ci-dessus, laquelle donne les boîtes le plus économiquement?

6. Montrer qu'en choisissant des patrons différents, on peut former des boîtes cubiques sans aucune perte. Quelle est à présent la disposition la plus économique?

7. Le commanditaire préfère des tétraèdres, mais exige une adaptation qui ne donne pas de chutes.

On forme donc une boîte dont les 4 faces sont des triangles isocèles de hauteur $a/2$ et de base b, de sorte que l'on a un patron en forme de parallélogramme de côté $2b$ et de hauteur $a/2$, qu'on plie suivant 3 plis pour faire une boîte (comme en 2) et que deux patrons occupent la largeur de la bande.

Montrer qu'il existe une valeur de b entre $\sqrt{2}$ dm et $\sqrt{3}$ dm qui donne le volume de 1 décimètre cube.

Expliquer pourquoi la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{12}{\sqrt{25-u_n}}$ converge vers le carré de cette valeur de b. Evaluer numériquement cette valeur, et la surface utilisée par boîte. Cette disposition est-elle avantageuse par rapport à celle utilisée en 2?